

**CONCURSUL DE MATEMATICĂ APLICATĂ „ASTRA-HAIMOVICI”**
**Etapa locală, 25.02.2022**
**Filiera tehnologică**
**Clasa a XII-a**

- 1.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = x^2 y^2 - 4x^2 - 4y^2 + 20.$$

- (3p) a)** Arătați că legea de compoziție se poate scrie

$$x * y = (x - 2)(x + 2)(y - 2)(y + 2) + 4, \text{ pentru orice } x, y \in \mathbb{R}.$$

- (2p) b)** Rezolvați pe mulțimea numerelor reale ecuația  $x * x * x * x * x = 5$ .

- (2p) c)** Demonstrați că  $(-200) * (-199) * \dots * (-2) = 2 * 3 * \dots * 200$ .

- 2.** Se consideră mulțimea  $G = \left\{ A(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$ . Arătați că:

**(4p) a)** Mulțimea  $G$  formează grup comutativ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

**(3p) b)** Arătați că  $(G, \bullet) \simeq (\mathbb{Z}, +)$ .

- 3.** Viteza de creștere a unui brad în primii 60 de ani este dată de legea

$$v(t) = 0,01t + 0,1 \text{ (m / an)}.$$

**(4p) a)** Cât este de înalt bradul după 60 de ani?

**(3p) b)** Care este vârsta bradului când înălțimea sa este de 12 m?

- 4.** Se consideră funcțiile

$$F, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = (x^2 + ax + b)e^x, f(x) = (x^2 + x)e^x, \text{ unde } a, b \in \mathbb{R}.$$

**(2p) a)** Determinați numerele reale  $a$  și  $b$  pentru care funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .

**(3p) b)** Pentru  $a = -1, b = 1$ , calculați  $\int_0^1 f(x)F(x)dx$ .

**(2p) c)** Pentru  $a = -1, b = 1$ , determinați numărul real  $m > 0$  pentru care

$$\int_0^m \frac{F(x) + f(x)}{2x^2 + 1} dx = e^{2025} - 1.$$

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp efectiv de lucru: 3 ore.